

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

SEMINARSKI RAD

Postupci simulacije fluida

Bruno Mikuš

Voditelj: *prof.dr.sc. Željka Mihajlović*

Zagreb, svibanj, 2011.

Sadržaj

1	Uvod	3
2	Fizikalna i matematička pozadina.....	4
2.1	Fizika fluida.....	4
2.2	Pristup prostoru	6
2.2.1	Lagrangeov čestični pristup.....	6
2.2.2	Eulerova rešetka.....	6
2.3	Granični uvjeti	8
2.4	Razna matematika.....	9
2.5	Semi-Lagrangian metoda advekcije	10
3	Postupci u simulaciji fluida	12
3.1	Jednostavan Eulerov algoritam fluida.....	12
3.2	Hidrodinamika izgladenih čestica	12
3.3	Sustav opruga i čestica	13
4	Praćenje i vizualizacija površine	14
4.1	Marker čestice.....	14
4.2	Metode razinskih skupova	14
4.3	Polje boja.....	15
4.4	Pokretne kocke.....	15
4.5	Metakugle	15
5	Simulacija fluida u stvarnom vremenu.....	16
6	Zaključak	19
	Literatura	20
	Sažetak.....	21

1 Uvod

Znanje o ponašanju fluida se primjenjuje u raznim područjima poput meteorologije, astrofizike, vulkanologije, oceanografije i mnogih industrija. Poznavanje fizike fluida otkriva nam kakvo će sutra biti vrijeme, kako se ponaša svemir, omogućuje izradu visokoefikasnih strojeva kao što su motori, hidraulički alati, poboljšava svojstva prijevoznih sredstava i donosi nam sate razonode u obliku vizualno dotjeranih filmova i igara.

Svemir nije praktično u potpunosti opisati nizom diferencijalnih jednadžbi, ali je moguće to napraviti za pojedine njegove dijelove i na taj način do neke mjere predvidjeti kako će se ti dijelovi ponašati. Claude-Louis Navier i George Gabriel Stokes su izveli jednadžbe koje opisuju kretanje fluida i postavili osnovu za mnoge oblike simulacija i analiza raznih problema u kojima je bitno poznavati kako se plinovi i tekućine ponašaju.

U ovome su radu opisani postupci simulacije fluida korišteni prvenstveno u industriji zabave za potrebe razvoja animiranih filmova i računalnih igara. Razlog je što produkti tih grana industrije pružaju najbolji dokaz kvalitete pojedinih postupaka. Simulacije za druge sustave poput meteoroloških ili industrijskih su daleko egzaktnije, ali i zahtjevnije te njihovi rezultati kojiput ne pružaju mogućnost jednostavne vizualizacije.

Računalna dinamika fluida

Na području simulacije fluida je bitno spomenuti računalnu dinamiku fluida (CFD, engl. *Computational Fluid Dynamics*) kao granu mehanike fluida koja koristi numeričke metode i algoritme kako bi se riješili i analizirali problemi koji uključuju tokove fluida. Temelj skoro svih CFD problema su spomenute Navier-Stokesove jednadžbe, izvedene Eulerove jednadžbe i jednadžbe punog potencijala.

Za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (PDJ) se koriste razne metode, ovisno o fluidu koji se simulira i o okruženju za koje se simulira:

- metode konačnih volumena, jednadžbe se rješavaju nad diskretnim kontrolnim volumenima.
- metode konačnih elemenata, tehnike rješavanja PDJ koje eliminiraju diferencijalne jednadžbe u potpunosti ili ih svode na jednostavne diferencijalne jednadžbe.
- metode konačnih razlika, jednostavne za implementirati, a temelje se na zamjeni diferencijalnih jednadžbi sa jednadžbama konačnih razlika kao aproksimacijama derivacija.
- metode graničnih elemenata, rješavaju PDJ izražene u obliku integrala.
- razne druge metode...

2 Fizikalna i matematička pozadina

U radu sa simulacijom fluida je potrebno široko znanje raznih područja, alata i metoda iz fizike i matematike. Osim osnovnih jednažbi fluida, nužno je objasniti kako se promatra prostor fluida, koji se granični uvjeti koriste, kako se rješavaju sustavi prisutni u jednažbama fluida i slično.

2.1 Fizika fluida

Kretanje fluida je moguće opisati skupom jednažbi, a ovisno o vrsti fluida i području primjene koriste se razni oblici. U simulacijama za potrebe računalne grafike se koriste jednažbe koje opisuju nestlačivi tok, a to su Navier-Stokesove i jednostavnije Eulerove jednažbe.

Navier-Stokesove jednažbe

Neka na fluid sastavljen od čestica (elementa) mase m djeluje sila $\vec{F}$ i uzrokuje akceleraciju $\vec{a}$:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Akceleracija je promjena vektora brzine $\vec{u}$ čestice fluida u vremenu duž nekog puta koji čestica opisuje. Zato se akceleracija opisuje materijalnom derivacijom $\frac{D}{Dt}$ (detaljnije u 2.5):

$$\vec{F} = m \frac{D\vec{u}}{Dt}$$

Sile koje djeluju na fluid su poznate:

- gravitacija, odnosno vanjska sila. ($m\vec{g}$)
- sila tlaka kao gradijent tlaka po volumenu fluida. ($-V\nabla p$)
- sila uzrokovana viskoznom prirodom čestica. Viskoznost je najjednostavnije shvatiti kao težnju (silu) ujednačavanju brzine čestice sa brzinama okolnih čestica. ($V\eta\nabla^2\vec{u}$)

Uvođenjem rastava sila uz oznake V za volumen i η za dinamičku viskoznost fluida:

$$m \frac{D\vec{u}}{Dt} = m\vec{g} - V\nabla p + V\eta\nabla^2\vec{u}$$

U daljnjem razmatranju se pretpostavlja kako broj čestica raste u beskonačnost, a samim time njihova masa i volumen teže nuli pa te varijable treba nekako zamijeniti. S tim na umu, svojstvo koje bolje opisuje fluid je gustoća, jer obuhvaća volumen i masu. Dijeljenjem sa volumenom i potom gustoćom ρ dobiva se:

$$m \frac{D\vec{u}}{Dt} = m\vec{g} - V\nabla p + V\eta\nabla^2\vec{u} \quad / : V$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho\vec{g} - \nabla p + \eta\nabla^2\vec{u} \quad / : \rho$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{u}$$

Gdje je ν kinematička viskoznost. Zadnja formula je upravo onaj oblik Navier-Stokesove jednadžbe momenta koji je pogodan za korištenje u simulacijama. Izraz za materijalnu derivaciju se može raspisati i nakon male raspodjele dobiva se izraz uobičajen u literaturi:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \vec{g} + \nu\nabla^2\vec{u}$$

Druga Navier-Stokesova jednadžba proizlazi iz pretpostavke da je fluid nestlačiv i da se utjecaj temperature može zanemariti. Nestlačivost znači da se volumen kroz vrijeme ne mijenja, tj. polje brzina fluida ne divergira:

$$\nabla\vec{u} = 0$$

Ovom se jednadžbom također jamči i očuvanje mase. Očuvanje volumena i mase je bitno za postupke simuliranja jer se na taj način implicitno ostvaruje dojam realnosti.

Zajedno, te dvije jednadžbe opisuju nestlačivi tok koji pretpostavlja nepromjenjivost gustoće fluida unutar infinitezimalnog volumena koji se giba brzinom fluida i da je divergencija brzine fluida nula.

Eulerove jednadžbe

Ako nije potrebno simulirati iznimno viskozne tekućine ili se simulacije odvijaju na većim razinama gdje se utjecaj viskoznosti ne primjećuje, izraz za viskoznost se može izbaciti iz jednadžbe momenta (Bridson, 2008). Takve jednadžbe fluida se zovu Eulerove jednadžbe:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p$$

$$\nabla\vec{u} = 0$$

Opravdanje ovog postupka je u smanjenju količine računanja tamo gdje detalj nije nužan, ali i činjenica da kojiput numerička greška nastala pri računanju Eulerovih jednadžbi stvara efekte koje bi inače objasnili kao viskozno ponašanje.

Stlačivi tok

Ako se gustoća fluida znakovito mijenja s promjenom tlaka kao na primjer kod udarnih valova, ponašanje fluida opisujemo stlačivim tokom. Indikatori stlačivog toka su Machov broj koji je za ovu vrstu toka veći od 0.3 i velike promjene tlaka. Za opis ovakvih tokova koriste se jednadžbe punog potencijala. Daljnje razmatranje ne ulazi u opseg ovog seminara.

2.2 Pristup prostoru

Postoje dva načina opisivanja ili poimanja prostora fluida, Eulerova rešetka i Lagrangeov čestični pristup. Riječ je o pristupima fluidu koji se u neizmjereno malim dimenzijama svode na isto, ali kako neograničen memorijski prostor nije moguć ni praktičan, potrebno je znanje o oba pogleda, njihovim prednostima i manama.

Pristupima je zajedničko promatranje fluida kao skupa čestica, a svaka čestica može biti opisana nekakvim fizikalnim svojstvom ϕ koje može biti vektorsko, skalarno ili tenzorsko. Sveukupno ta svojstva čine polje fizikalne veličine Φ .

2.2.1 Lagrangeov čestični pristup

Fluid je ništa drugo nego velik broj molekula koje vrše međusobnu interakciju stoga ovaj pristup modelira fluid upravo tako, kao skup čestica. Čestice nose razna svojstva i dvije čestice ne mogu zauzimati isti prostor u isto vrijeme.

Pozicija čestice je funkcija vremena tj. $x_i = x_i(t)$, brzina čestice je vremenska derivacija pozicije, a akceleracija vremenska derivacija brzine. Fluid predstavlja materijalni volumen $V_M(t_0)$ sa beskonačnim brojem čestica u početnom trenutku t_0 . Početna pozicija svake čestice je $y_i = x_i(t_0)$ pa je pozicija čestica nakon proteklog vremena t ovisna o početnoj poziciji $x_i = x_i(y_i, t)$.

Za neko polje svojstva fluida Φ također vrijedi $\Phi = \Phi(y_i, t)$, a promjenu tog svojstva kroz vrijeme opisujemo materijalnom derivacijom:

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \left. \frac{\partial \Phi(y_i, t)}{\partial t} \right|_{y_i = \text{konst.}} + u_i(y_i, t) \left. \frac{\partial \Phi(y_i, t)}{\partial y_i} \right|_{t = \text{konst.}}$$

U čestičnom sustavu ne postoji promjena početnih pozicija ∂y_i pa je materijalna derivacija samo parcijalna derivacija po vremenu za Lagrangeov čestični pristup:

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \left. \frac{\partial \Phi(y_i, t)}{\partial t} \right|_{y_i = \text{konst.}}$$

Ovo je bitno za rješavanje Navier-Stokesovih jednažbi jer za čestični pristup nije potrebno rješavati advektivnu promjenu svojstva.

2.2.2 Eulerova rešetka

Svakoj točki prostora se u svakom vremenskom trenutku pridružuje fizikalno svojstvo one čestice fluida koja se u promatranom trenutku nalazi u promatranoj točki prostora. Rezultat je polje fizikalne veličine ili svojstva izraženo prostornim koordinatama. Eulerov pogled je najjednostavnije shvatiti kao promatranje fluida u nekim određenim fiksnim točkama prostora – točkama na rešetci.

Ovaj pristup je češći u računalnoj grafici jer je lakše rješavanje prostornih derivacija koje se nalaze u Navier-Stokesovim jednažbama (pritisak i viskoznost), a također je jednostavnija i njihova numerička aproksimacija na fiksnim pozicijama. Nedostatak je nužna diskretizacija prostora pa nagle i detaljne promjene u fluidu ne dolaze do izražaja. Najbitnija razlika u odnosu na Lagrangeov pristup je način na koji se neko svojstvo na poziciji u rešetci mijenja i o čemu ta promjena ovisi.

Čestice y_j možemo pratiti kroz vrijeme t za pojedini element rešetke x_i kao $y_j = y_j(x_i, t)$, a taj izraz za t_0 daje početni položaj one čestice koja se u t nalazi na rešetci u x_i .

Za neko polje svojstva fluida Φ tada vrijedi:

$$\Phi = \Phi(y_j, t) = \Phi(y_j(x_i, t), t) = \Phi(x_i, t)$$

Uzevši u obzir da se fluid promatra samo u točkama rešetke, ovaj izraz govori kako su svojstva u tim točkama zavisna o česticama koje se gibaju poljem brzina $u(x, t)$. Stoga prema definiciji materijalne derivacije vrijedi:

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \left. \frac{\partial \Phi(x_i, t)}{\partial t} \right|_{x_i = \text{konst.}} + u_i(x_i, t) \left. \frac{\partial \Phi(x_i, t)}{\partial x_i} \right|_{t = \text{konst.}}$$

Prvi dio desne strane izraza opisuje lokalnu promjenu svojstva u točki rešetke, a drugi dio opisuje advektivnu brzinu promjene svojstva koja nastaje zbog gibanja čestica oko točke rešetke.

MAC-rešetka

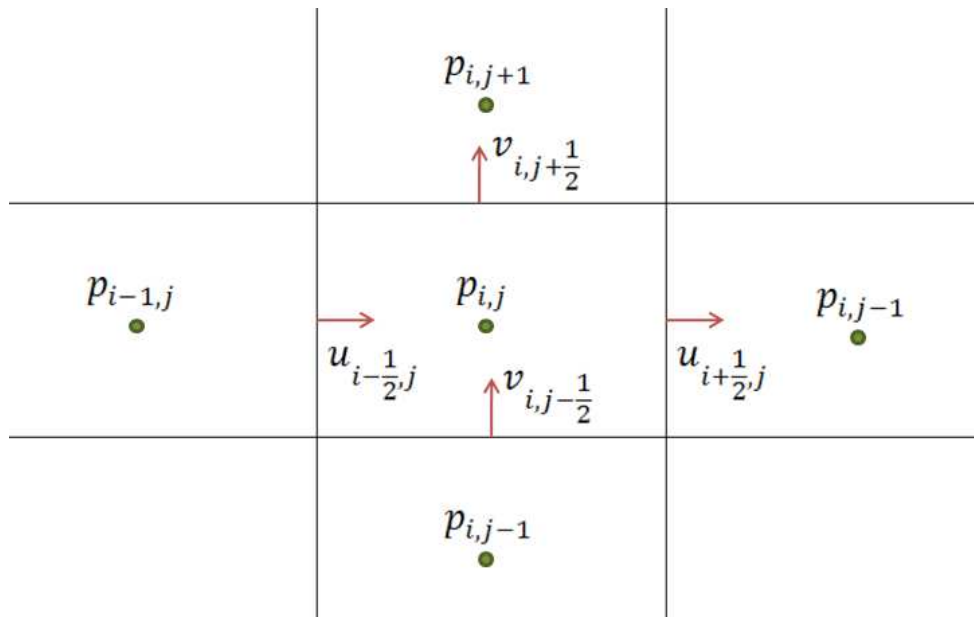
Rešetka markera i ćelija (MAC, engl. *Marker-and-Cell grid*) je način raspoređivanja podataka za Eulerovu podjelu prostora. U simulacijama fluida je često potrebno računati centralne difference koje u uobičajenoj raspodjeli podataka mogu unijeti grešku u sustav. MAC-rešetka smanjuje grešku nastalu računanjem centralne difference mijenjanjem rasporeda podataka (Bridson, 2008).

Različite varijable su spremljene na različita mjesta pa se tako za potrebe dinamike fluida u središtima ćelija rešetke pamte vrijednosti tlaka, a na granicama ćelija se pamte vrijednosti brzina sa polovičnim indeksima kao što je prikazano na slici 1. Brzina je rastavljena po komponentama $\vec{u} = (u, v)$.

Ovakva raspodjela omogućuje korištenje točnije centralne difference za računanje gradijenta tlaka i divergencije polja brzine pri rješavanju jednažbi fluida. Umjesto uobičajenog izraza se koristi se izraz sa polovičnim indeksima:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$



Slika 1. MAC-rešetka

Osim tlaka, u rešetci se mogu pamtit i druge vrijednosti, ali u općenitom slučaju tlak i brzina su jedini potrebni, posebice kada se gustoća i temperatura smatraju konstantnima.

2.3 Granični uvjeti

Za potrebe simulacije u bilo kakvom prostoru i sa bilo kakvim jednadžbama potrebno je odrediti ponašanje fluida na granicama. Ako granica nije dobro definirana fluid se neće ispravno ponašati i mogući su razni artefakti u simulaciji. Postoji više vrsta granica, ovdje su navedene neke od češćih.

Čvrsti zid

Fluid ne teče u ili iz površine već je njegova brzina na granici jednaka brzini granice. To znači da relativna brzina između fluida i granice ima normalu nula, odnosno da su normale brzina iste:

$$\vec{u}_{fluid}\hat{n} = \vec{u}_{površina}\hat{n}$$

Ovaj je uvjet najlakše shvatiti kao da se čestice fluida najbliže površini počinju gibati tangencijalno, a ne lijepe se za površinu (engl. *no-stick*).

Pri modeliranju viskozne tekućine koja će prijanjati uz čvrstu površinu, a neće kliziti (engl. *no-slip*) potreban je drugačiji uvjet, takozvani Neumannov uvjet. Jednostavno izraženo, brzina fluida treba biti jednaka brzini površine:

$$\vec{u}_{fluid} = \vec{u}_{površina}$$

Ovi se uvjeti su primjenjivi i u slučaju interakcije dva fluida, a posebice onda kada se ti fluidi ne miješaju. Bitno je samo da su brzine na granicama iste.

Slobodna površina

Ovim je uvjetom opisano ponašanje fluida kada na njega djeluje konstantan okomiti napor, a ne djeluje paralelni napor. Najbolji primjer je granica između površine vode i zraka, gdje zrak djeluje okomito tlakom na vodu. Kako bi se izbjeglo nepotrebno modeliranje fluida zraka iznad nekog tekućeg fluida pretpostavlja se utjecaj tog zraka kao površinska napetost.

Površinska napetost je odupiranje fluida vanjskim silama i samim time težnja smanjivanju površine fluida odnosno zakrivljenosti površine fluida. Vanjska sila je utjecaj tlaka zraka, a može biti bilo koja druga sila poput udara na površini ili plutajućeg predmeta. U stanju balansa vrijedi:

$$\Delta p = \gamma \kappa$$

Razlika tlaka na granici će uzrokovati srednju zakrivljenost površine κ na fluidu sa koeficijentom površinske napetosti γ .

Ako nije bitno modelirati površinsku napetost, kao vrijednost tlaka iznad slobodne površine koristi se proizvoljna konstanta. Takav uvjet slobodne površine naziva se Dirichletov.

Periodična granica

Ako se fluid nalazi u prostoru čiji se elementi periodički ponavljaju, nije potrebno modelirati čitav prostor već samo onaj njegov dio koji se ponavlja. Primjerice, za fluid koji se giba u torusu, nije potrebno modelirati cijeli torus, već samo jedan njegov dio.

Granica dva fluida

Na ponašanje fluida u ovakvoj situaciji djeluje više faktora vezanih uz prijelaz iz jednog fluida u drugi. Brzine fluida se mogu modelirati prema granicama čvrstog zida, a tangencijalne brzine mogu biti nepovezane pri neviskoznom toku. O postojanju površinske napetosti ovisiti će skok u tlakovima. Potrebno je razmotriti i mogućnost miješanja fluida.

2.4 Razna matematika

U nastavku ovog odjeljka su navedeni i objašnjeni neki pojmovi iz matematike koji ne pripadaju u određenu kategoriju, ali je nužno njihovo poznavanje za rad sa simulacijama fluida.

Materijalna derivacija

Ova derivacija se koristi za opis promjena neke vrijednosti prilikom gibanja duž nekog puta brzinom u . Prema definiciji materijalna derivacija za neku vrijednost q je:

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x}$$

Prvi dio izraza opisuje promjenu vrijednosti kroz promjenu vremena, a drugi dio izraza opisuje promjenu vrijednosti u ovisnosti o kretanju (advekcija).

Courant-Friedrichs-Lewy uvjet (CFL)

Problem sa simulacijama fluida je odabir dobrog vremenskog koraka Δt koji će jamčiti konvergiranje diferencijalnih jednadžbi. Ako nije odabran dobar vremenski korak simulacija će postati nestabilna. Kako promjena svojstava ovisi o brzinama i poziciji čestica fluida, vremenski korak mora ovisiti isto o toj domeni. Za jednu dimenziju uvjet glasi:

$$\frac{u\Delta t}{\Delta x} \leq C$$

Konstanta C ovisi o jednadžbi koja se rješava, a ne o Δx i Δt .

U slučaju Eulerove rešetke ograničenje za stabilnost sustava mora biti takvo da element fluida ne može preskočiti ćeliju rešetke. Tako formulirano, uvjet za vremenski korak je:

$$\Delta t \leq C \frac{\Delta \tau}{|u_{max}|}$$

Širina ćelije je $\Delta \tau$, a $|u_{max}|$ je najveći iznos brzine u rešetci. Konstanta C je proizvoljna.

Podjela diferencijalnih jednadžbi

Pri rješavanju diferencijalne jednadžbe pojedine je njene dijelove jednostavnije ili bolje rješavati različitim algoritmima. Zato je korisno podijeliti jednadžbe na više manjih i rješavati ih odvojeno. U nekim je postupcima moguće pravilnim redoslijedom podjela ostvariti preduvjete za ispravnije rješenje i rad ostatka algoritma.

Za općenitu diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{dq}{dt} = f(q) + g(q)$$

Moguće je izvršiti podjelu i rješavanje Eulerovom metodom:

$$q' = q_n + \Delta t \cdot f(q_n)$$

$$q_{n+1} = q' + \Delta t \cdot g(q')$$

Ili ako imamo određene metode rješavanja F i G :

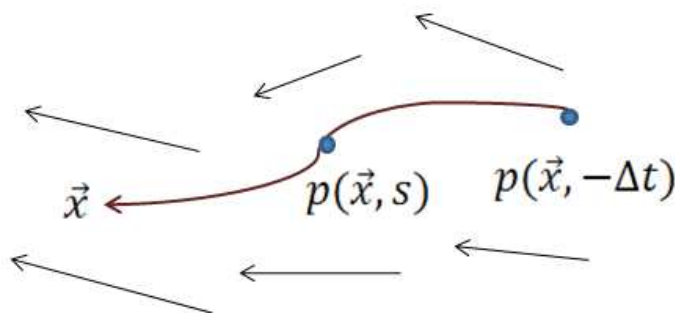
$$q' = F(\Delta t, q_n)$$

$$q_{n+1} = G(\Delta t, q')$$

2.5 Semi-Lagrangian metoda advekcije

Za rješavanje problema advekcije u Eulerovoj rešetci postoje razna rješenja, a najbolje i najčešće korišteno je semi-Lagrangian metoda te je njeno pojašnjenje nužno za razumijevanje nekih postupaka.

Ideja metode je da će na mjesto $\vec{x}$ u vrijeme $t + \Delta t$ doći čestica sa pozicije $p(\vec{x}, -\Delta t)$ prateći put $p(\vec{x}, s)$ kojeg definira polje brzina, kao što je prikazano na slici 2. Nalaženjem čestice koja će doći na mjesto $\vec{x}$ pronađena je i promjena bilo kakvog svojstva ovisnog o brzini. U postupku se ne stvaraju niti ne postoje nikakve čestice pa se zato metoda zove *semi-Lagrangian*.



Slika 2. Praćenje putanje čestice

Problem materijalne derivacije, odnosno advekcije nekog svojstva je oblika:

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + u \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0$$

Običnom Eulerovom integracijom bi se iz te jednadžbe izrazio Φ_{n+1} i uvrštavanjem poznatih vrijednosti izračunala novu vrijednost svojstva. Nažalost, ovakav pristup je bezuvjetno nestabilan bez obzira na to koliko je malen vremenski korak.

Zato je bolje koristiti semi-Lagrangian algoritam, koji je bezuvjetno stabilan čak i za veliki vremenski korak. Sastoji se od sljedećih koraka za sve ćelije rešetke sa pozicijom $\vec{x}$:

1. Izračunati $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}(\vec{x})$, brzinu čestice u ćeliji.
2. Odrediti poziciju čestice koja će doći na mjesto $\vec{x}$: $\vec{x}_{putnik} = \vec{x} - \Delta t \vec{u}(\vec{x})$.
3. Interpolirati novu vrijednost svojstva Φ_{n+1} pomoću $\vec{x}_{putnik}$ i vrijednosti svojstava ćelija oko te pozicije.

Umjesto Eulerove integracije u koraku 2 je poželjno koristiti neku drugu metodu poput Runge-Kutta drugog ili višeg reda.

3 Postupci u simulaciji fluida

Slijedi opis nekih postupaka korištenih za simulaciju fluida. Svaki od navedenih postupaka poduprt je nizom članaka i radova koji potvrđuju njihovu primjenjivost i korisnost. Važno je napomenuti kako ovo nisu sve osmišljene i dostupne metode, a još bitnije je reći da većina postupaka koristi neke od elemenata fizike i matematike opisanih u prethodnom poglavlju.

3.1 Jednostavan Eulerov algoritam fluida

Algoritmi koji rade na principu podjele prostora Eulerovom rešetkom često slijede princip opisan ovim algoritmom. Struktura podataka je proizvoljna, a MAC-rešetka je očigledan izbor koji daje dobre rezultate. S ciljem pojednostavljenja rješavanja, u primjeru se koriste Eulerove jednačbe, a izraze za viskoznost (kao i neke druge) je moguće dodati naknadno.

Nakon vremenske podjele prvog reda jednačbe koje se rješavaju su:

$$\frac{D\Phi}{Dt} = 0 \quad \text{advekcija nekog svojstva fluida}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{g} \quad \text{utjecaj vanjskih sila}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad t. d. \quad \nabla \vec{u} = 0 \quad \text{nestlačivost uz očuvanje mase i volumena}$$

Konačno rješenje zahtjeva korištenje algoritma za rješavanje advekcije poput semi-Lagrangian metode i algoritma za rješavanje tlaka.

Ukupni algoritam prati sljedeće korake:

1. Inicijalizacija početnog polja brzina $\vec{u}_0$
2. Ponavljaj za korak $n = 0, 1, 2 \dots$
 - a. Odredi Δt
 - b. $\vec{u}_a = \text{advekcija}(\vec{u}_n, \Delta t)$
 - c. $\vec{u}_b = \vec{u}_a + \Delta t \vec{u}_a$
 - d. $\vec{u}_{n+1} = \text{tlak}(\Delta t, \vec{u}_b)$

Za rješavanje promjene tlaka i promjene brzine zbog promjene tlaka jedno od mogućih rješenja je oblikovanje niza linearnih jednačbi. To je moguće preko jednačbe i uvjeta nestlačivosti uz dodatnu primjenu graničnih uvjeta (Braley, 2009).

3.2 Hidrodinamika izgladenih čestica

Ova metoda koristi Lagrangeov pristup prostoru, a pretpostavlja da čestice fluida mijenjaju svoja svojstva pod utjecajem drugih čestica unutar nekog radijusa h . Utjecaj okolnih čestica na

pojedino svojstvo Φ se 'izglađuje' pomoću jezgrenih funkcija. Svojstva koja se mijenjaju na taj način se odabiru iz jednadžbi fluida pa je tako i ova metoda dobila svoje ime: hidrodinamika izglađenih čestica (SPH, engl. *Smoothed particle hydrodynamics*). Općeniti oblik računanja svojstva je:

$$\Phi(r) = \sum_j m_j \frac{\Phi_j}{\rho_j} W(r - r_j, h)$$

Funkcija se računa za čestice koje su unutar radijusa h od promatrane čestice na poziciji r . $W(r - r_j, h)$ je izglađujuća jezgra radijusa h . Ako je W parna i normalizirana, interpolacija je točnosti drugog reda (Müller, 2003). Pogodnost ovakvog računanja svojstva je jednostavno računanje raznih derivacija svojstva. Potrebno je samo derivirati jezgru.

Fluid se najčešće dijeli u čestice jednakih masa što znači da se ovom metodom implicitno jamči očuvanje mase. Nedostatak ovog pristupa je što zahtjeva velik broj čestica, a pritom fizikalna točnost nije kao u slučaju drugih metoda (posebice Eulerovih). Prednost je što ne treba rješavati sustav linearnih jednadžbi za računanje tlaka, što može biti zahtjevno.

Iako je masa konstantna, gustoća čestice se mijenja uzrokovano gibanjem fluida:

$$\rho(r) = \sum_j m_j W(r - r_j, h)$$

Još jedan nedostatak ovog pristupa je nesimetričnost sila i problem sa očuvanjem momenta, ali o detaljima rješenja tih problema u nastavku rada gdje je detaljnije opisana moguća implementacija.

3.3 Sustav opruga i čestica

Umjesto opisivanja fluida nizom diferencijalnih jednadžbi i računanja promjena integracijama raznih vrijednosti, fluid je moguće oblikovati kao skup čestica povezanih oprugama (Clavet, 2005). Čestice se pomiču ovisno o svojoj brzini, zatim se na njih primjenjuje utjecaj opruga, gustoće i sudara s drugim česticama. Na kraju vremenskog koraka računa se promjena pozicije kao sljedeća brzina čestice.

Ovaj pristup omogućuje brzu implementaciju i lakše rješavanje nestabilnosti u sustavu. Dok u drugim metodama treba paziti na pravilan vremenski korak, ovdje se poznavanje sila koje djeluju u budućnosti koristi kako bi se nestabilno ponašanje spriječilo čak i uz veliki skok u vremenu.

Efekti i ponašanje fluida poput viskoznosti, elastičnosti i plastičnosti se lako ostvaruju ubacivanjem, micanjem i mijenjanjem duljina opruga između čestica. Moguće je oblikovanje kapljica i rastegnutih ploha fluida, a da je pritom zadržana glatka površina. Prednosti postoje i kod simulacije površinske napetosti, za koju nije potrebno računati zakrivljenost površine fluida.

4 Praćenje i vizualizacija površine

Nakon računanja fluida potrebno je nekako odrediti njegovu površinu kako bi se mogao prikazati. To nije jednostavan problem, posebice kada su elementi fluida raspršeni u Eulerovom ili Lagrangeovom prostoru. Rješenje su algoritmi pronalaženja, grupiranja i prikazivanja površine, a neki od češćih, ne nužno najboljih, su ukratko opisani u ovom poglavlju.

4.1 Marker čestice

U Eulerov sustav se na početku simulacije na mjesto fluida ubacuju diskretne čestice. Svaki vremenski korak one se pomiču kroz polje brzina koje opisuje gibanje fluida. Prednost ovog pristupa je lakše praćenje promjena u samoj rešetci. Ako čestica fluida uđe u novu ćeliju rešetke, ćelija se označava kao puna, a ako sve čestice napuste ćeliju, označava se kao prazna.

Nedostatak ove metode je pri prskanju i širenju fluida, gdje nedovoljan broj marker čestica može uzrokovati loš prikaz. Problem je također i u prikazu čestica odnosno same površine, što zahtjeva primjenu neke druge metode.

4.2 Metode razinskih skupova

Ove su metode česti alat određivanja površine fluida koji se nalazi u prostoru opisanom Eulerovom rešetkom. Trenutno su najbolji način realizacije glatkih površina u simulaciji fluida, ali su skuplje od metoda koje generiraju implicitne površine.

Rešetka se proširuje novom vrijednosti ϕ koja predstavlja vrijednost funkcije razinskog skupa (engl. *level set*). Vrijedi da je $\phi = 0$ za ćeliju koja se nalazi na površini fluida, $\phi < 0$ za ćeliju koja je unutar fluida i $\phi > 0$ za ćeliju izvan fluida.

Za računanje ϕ se koristi predznačena funkcija udaljenosti koja vraća udaljenost od najbliže točke iz nekog skupa S :

$$D_S(\vec{x}) = \min_{\vec{p} \in S} \|\vec{x} - \vec{p}\|$$

Kada se ova funkcija primjeni na skup ćelija koje čine površinu fluida rezultat će za proizvoljnu ćeliju rešetke biti pozitivan ako je ćelija izvan fluida odnosno negativna ako je ćelija unutar fluida. Postoje dvije metode rješavanja ove funkcije:

- Metoda brzog iteriranja – iterira prvo po najbližim, a onda po daljim točkama.
- Brzi prelet – računa funkciju za najdalje točke i rekursivno rješava prema bližima.

Jednom izračunate vrijednosti razinskih skupova mogu se mijenjati advektivno kao i druga svojstva fluida, ali taj postupak uvodi grešku u sustav. Rješenje je nakon nekoliko iteracija ponovno računati vrijednosti razinskih skupova ili koristiti pomoćne čestice (Enright, 2002). Čestice se

postavljaju uz površinu fluida, sadrže predznak koji je isti kao i predznak vrijednosti razinskog skupa ćelije u kojoj se nalaze, a putuju poljem brzina kao marker čestice. Ako čestice uđu u ćeliju sa krivim predznakom, detektirana je greška i potrebna je korekcija ϕ vrijednosti.

4.3 Polje boja

Boja je definirana kao vrijednost koja je 1 tamo gdje je čestica, a 0 tamo gdje nije čestica. Za neku točku prostora r definirana je vrijednost boje, slično kao u SPH metodi:

$$c_s(r) = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} W(r - r_j, h)$$

Površina fluida se detektira kao izopovršina tamo gdje se događaju promjene u polju boja. Čestica za koju gradijent boje poprima vrijednost veću od neke unaprijed definirane konstante je površinska čestica. Gradijent boje ujedno daje i normalu površine, a preko laplasijana polja boja računa se mjera zakrivljenosti površine κ .

4.4 Pokretne kocke

Ovaj algoritam generira poligonalnu mrežu neke izopovršine definirane trodimenzionalnim skalarnim poljem. U simulaciji fluida koriste se čestice ili točke rešetke koje predstavljaju površinu fluida kao to skalarno polje.

Algoritam iterira kroz skalarno polje, promatrajući osam prostorno susjednih točaka (koji čine kocku) na temelju kojih određuje poligone potrebne za predstavljanje tih točaka. Konačan skup poligona čini poligonalnu mrežu pogodnu za prikaz. Normale poligona se računaju iz gradijenta skalarnog polja.

Ekvivalentan algoritam za dvije dimenzije zove se pokretni kvadri.

4.5 Metakugle

Čestice koje čine fluid se mogu opisati metakuglama. One su definirane funkcijom u n dimenzija, koja opisuje kružni prostor oko čestice. Volumen definiran metakuglama je tamo gdje suma funkcija metakugli ne prelazi određeni prag. Funkcija koja opisuje površinu tog volumena je tada:

$$F(\vec{x}) = \sum_j k\left(\frac{\|\vec{x} - \vec{x}_j\|}{h}\right)$$

Jezgrena funkcija k je u stvari funkcija metakugle dok se parametrom h određuje izglađenost površine. Postoje razna poboljšanja temeljne ideje metakugli, a uglavnom se temelje na odabiru dobre funkcije. U obzir dolaze razne polinomijalne ili radijalne bazne funkcije.

5 Simulacija fluida u stvarnom vremenu

Za simulaciju fluida u stvarnom vremenu i u tri dimenzije potrebno je koristiti čestične metode. Ovisno o ukupnoj kompleksnosti sustava i efektima fluida koje ostvaruje moguće je sa relativno velikim brojem čestica ostvariti interaktivnu simulaciju. Kao primjer jedne takve simulacije u nastavku je opisano koje sve metode i pristupe opisane u radu treba primijeniti (Barley, 2009).

Potrebno je početi od jednačbi koje definiraju ponašanje fluida:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

Kako je riječ o Lagrangeovom pogledu na prostor, izraz za advekciju $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$ se može izbaciti iz prve jednačbe. Iz novonastale jednačbe možemo izraziti akceleraciju preko sila:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

$$\vec{a} = \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

$$\vec{a} = \vec{g} + \frac{1}{\rho} (f_{viskoznost} + f_{tlak})$$

Promjenu brzine je moguće izračunati računanjem tri sile. Prva je vanjska sila na fluid, koja je poznata. Druga sila je uzrokovana viskoznom prirodom fluida. Treća sila je utjecaj tlaka. Ti se izrazi mogu oblikovati i izračunati pomoću SPH jednačbi za svojstva:

$$f_{tlak,i} = -\nabla p = -\sum_j m_j \frac{p_i + p_j}{2\rho_j} \nabla W(r_i - r_j, h)$$

$$f_{viskoznost,i} = \mu \nabla^2 \vec{u}(r_i) = \mu \sum_j m_j \frac{\vec{u}_j - \vec{u}_i}{\rho_j} \nabla^2 W(r_i - r_j, h)$$

U izrazu za tlak se koristi razlika tlakova između dviju čestica kako bi se postigla simetričnost sila koja je problem u čestičnim metodama. U izrazu za viskoznost se koristi razlika brzina jer utjecaj viskoznosti proizlazi iz razlike brzina, a ujedno se tako osigurava i simetričnost viskoznih sila.

Za računanje sila potrebno je znanje o gustoći, tlaku, masi i brzini. Masa je uvijek konstantna za svaku česticu, a brzine se računaju na kraju algoritma pomoću akceleracije. Gustoća se računa prema ranije definiranom SPH izrazu:

$$\rho_i(r_i) = \sum_j m_j W(r_i - r_j, h)$$

Tlak se računa na temelju gustoće preko izraza za idealni fluid. U početnim pretpostavkama o prirodi fluida gustoća se smatrala konstantnom u bilo kojem djelu volumena fluida. Kako bi se gustoća održavala na nekoj početnoj razini ρ_0 izraz za tlak sadrži relativnu gustoću:

$$p_i = \kappa(\rho_i - \rho_0)$$

Ovdje je κ plinska konstanta fluida, ovisna o temperaturi. Sila tlaka ovisi o gradijentu polja tlaka tako da relativna gustoća ne stvara negativan efekt u izračunu.

Prije zadnjeg koraka algoritma, računanja brzine i nove pozicije čestice, potrebno je razmotriti još jednu silu, a to je površinska napetost kao uvjet slobodne površine. Koristeći polje boja $c_S(r_i)$ određuju se površinske čestice, normale površine i zakrivljenost površine.

Normala površine je gradijent polja:

$$n = \nabla c_S$$

Sila zakrivljenost površine se određuje iz laplasijana polja boja i konstante napetosti σ :

$$f_{napetost,i} = -\sigma \nabla^2 c_S \frac{n}{|n|}$$

Površinske čestice su one čestice za koje je iznos normale veći od nekog praga $|n| > l$. Te čestice se označuju kao površinske i na njih se primjenjuje sila napetosti.

Konačno, akceleracija se računa iz sume svih sila na česticu, uključujući i vanjske sile poput udara, gibanja i slično:

$$\vec{a} = \vec{g} + \frac{1}{\rho} (f_{viskoznost} + f_{tlak} + f_{napetost} + f_{vanjska})$$

Za računanje akceleracije i nove brzine pogodno je koristiti neku od metoda višeg reda koja će bolje podnijeti i veći korak integracije poput preskočne integracije ili Runge-Kutta metode. Kao korak integracije može se koristiti protok vremena između crtanja na ekran, fiksni korak ili korak određen CFL uvjetom.

Crtanje površine vode moguće je napraviti projekcijom fluida u rešetku prostora čiji će čvorovi biti označeni u blizini rubnih čestica. Nad fiksnom prostornom rešetkom moguće je provesti algoritam pokretnih kocki, a za bolje sjenčanje mogu se koristiti normale određene iz polja boja.

Izgladjujuće jezgre

Potrebno je odabrati dobre jezgre čiji će gradijenti i laplasijani odgovarati situacijama u kojima se funkcije koriste, a bolji rezultati se postižu koristeći drugačije jezgre za drugačije namjene upravo iz tog razloga.

Za izračun tlaka pogodna je 'šiljasta' jezgra, čiji gradijent ne teži u nulu kada r teži u nulu:

$$W_{\text{šiljasta}}(r, h) = \frac{15}{\pi h^6} (h - r)^3$$

Za izračun viskoznosti pogodna je jezgra sa linearnom drugom derivacijom:

$$W_{\text{viskoznost}}(r, h) = \frac{15}{2\pi h^3} \left(-\frac{r^3}{2h^3} + \frac{r^2}{h^2} + \frac{h}{2r} - 1 \right)$$

Za ostale jezgre (gustoća i polje boja) može se koristiti jednostavna polinomijalna jezgra:

$$W_{\text{polinomijalna}}(r, h) = \frac{315}{64\pi h^9} (h^2 - r^2)^3$$

Sve jezgre su definirane na području gdje vrijedi $0 \leq r \leq h$, dakle unutar područja međudjelovanja čestica.

6 Zaključak

Postupci simulacije fluida nalaze široko područje primjene od prirodnih znanosti do industrije zabave. Za većinu primjena nije potrebno izvršavati simulaciju u stvarnom vremenu, a vrlo rijetko ta simulacija treba biti vizualno dotjerana. Svejedno, postupci simulacije u stvarnom vremenu koji omogućuju i lijepu vizualizaciju su dobar početni korak prema ozbiljnijim primjenama.

Osim opisanih postupaka, postoji još puno drugih od kojih su neki već zastarjeli i naprosto postoje bolje metode, a neki su tek u svojim začetcima i jednog će dana možda biti popularni. Uz postupke simulacije bitni su i postupci vizualizacije od kojih su spomenuti neki češći, ali ne nužno i najbolji. Tema obuhvaća široko područje i nije moguće u potpunosti sve opisati, ali ono što jest objašnjeno služi kao dobar temelj daljnjem radu.

Uz pronalaženje drugih metoda, daljnji rad bi se trebao orijentirati i na razmatranje mogućnosti paralelizacije nekog algoritma (Auer, 2008). Paralelno izvršavanje algoritama je popularno i efikasno rješenje za ubrzanje nekih problema. Uzevši u obzirom da je grafički podsustav današnjeg doba prilagođen visokoparalelnom radu, problemi vezani uz grafiku se često paraleliziraju pa tako i problem simulacije fluida (Liu, 2004).

Literatura

- [1] Auer S.; Realtime particle based fluid simulation. Diplomski rad. Technische Universität München, 2008.
- [2] Braley C., Sandu A.: Fluid Simulation For Computer Graphics: A Tutorial in Grid Based and Particle Based Methods. 2009.
- [3] Bridson R.; Fluid Simulation for Computer Graphics. 2008.
- [4] Clavet S., Beaudoin P., Poulin P.; Particle-based Viscoelastic Fluid Simulation. *Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation* (2005).
- [5] Desburn M., Gascuel M.; Smoothed Particles: A new paradigm for animation highly deformable bodies. *Proceedings of EG Workshop on Animation and Simulation*, 1996, str. 61-76.
- [6] Enright D., Marschner S., Ferkiw R., Animation and Rendering of Complex Water Surfaces. 2002.
- [7] Foster N., Fedkiw R., Practical Animation of Liquids. 2001.
- [8] Keiser R., Adams B., Gasser D., Bazzi P., Dutré P., Gross M.; A Unified Lagrangian Approach to Solid-Fluid Animation. *Eurographics Symposium on Point-Based Graphics* (2005).
- [9] Liu Y., Liu X., Wu E.; An Improved Study of Real-Time Fluid Simulation on GPU. *The Journal of Computer Animation and Virtual World*, 2004.
- [10] Liu Y., Liu X., Wu E.; Real-Time Fluid Simulation on GPU with Complex Obstacles. *Proceedings of the 12th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications*, 2004.
- [11] Matsuda Y., Dobashi Y., Nishita T., Fluid Simulation by Particle Level Set Method With an Efficient Dynamic Array Implementation on GPU, 2007.
- [12] Müller M., Charypar D., Gross M.; Particle-Based Fluid Simulation for Interactive Applications. *Eurographics/SIGGRAPH Symposium on Computer animation* (2003).
- [13] Osher S., Sethian J. A., Fronts Propagating with Curvature Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations. 1988.
- [14] Stam J.; Stable Fluids. *Proceedings of SIGGRAPH*, 1999, str. 121-128.
- [15] Yu J., Turk G.; Reconstructing Surfaces of Particle-Based Fluids Using Anisotropic Kernels. *Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Computer animation* (2010).

Sažetak

Ovim radom je pokazana fizikalna i matematička osnova potrebna kako bi se ostvario sustav koji vjerno simulira fluid. Iako neki opisani postupci nisu fizikalno egzaktni, temelje se na principima opisanima egzaktnom fizikom. Postoje temeljne razlike u pristupu prostoru kroz koji se čestice fluida kreću, ali i skup metoda zajedničkih svim postupcima. Različitim se kombinacijama tih metoda ostvaruju razni postupci za simulaciju fluida. Nakon što je fluid simuliran potrebno je nekom od metoda praćenja površine pronaći gdje je površina fluida, a nekom od metoda vizualizacije se ta površina prikazuje. Napravljena je analiza prednosti i mana pojedinih postupaka. Na kraju je dan opis jedne moguće implementacije.