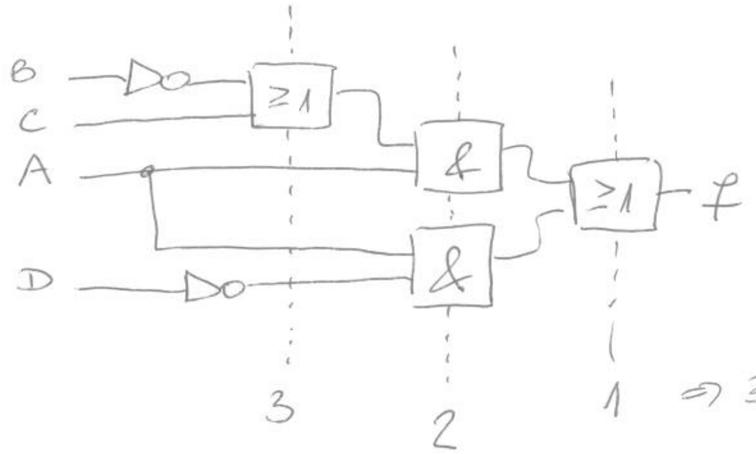
Minimizacija Booleove funkcije

1. svaki logički sklop u rad sustava unosi kašnjenja
- kod kombinacijskih sklopova trebamo brojati razine logike
  ⇒ najveći broj sklopova kroz koje signal treba proći od ulaza u komb. sklop pa do njegova izlaza; invertore najčešće ne brojimo
  ⇒ npr.



⇒ 3 razine logike

- ako svaki I i ILI kasne po 10 ns, f ću dobiti tek nakon 30 ns po promjeni ulaznih varijabli (u najgorem slučaju)

- za maksimalnu brzinu želimo minimalni broj razine logike ⇒ Σp ili Πs ⇒ može dovesti do većeg broja sklopova!

2. svaki logički sklop koji trebamo proizvesti nas košta
- npr. kombinacijski sklop koji na ulazu dobiva dva 4-bitna binarna broja a na izlazu generira 1 samo ako su ti brojevi jednaki.

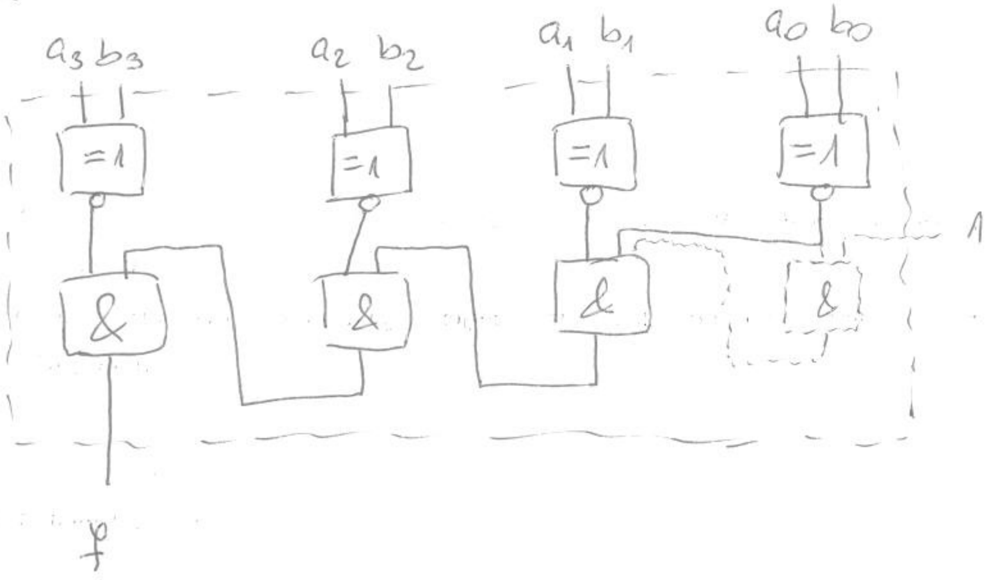
$a_3a_2a_1a_0$	$b_3b_2b_1b_0$	f
0000	0000	1
0001	0001	1
⋮		⋮
1111	1111	1
sve ostalo		0

$f(a_3a_2a_1a_0\, b_3b_2b_1b_0) = \Sigma m(0, 17, 34, 51, 68, 85, 102, 119, 136, 153, 170, 187, 204, 221, 238, 255)$

- imam 2^4 produkata i 1 ILI s 2^4 ulaza.

- za minimalnu cijenu želim minimizirati ukupni broj sklopova i broj ulaza koji ti sklopovi imaju ⇒ može tražiti povećanje broja razina logike (zad 3.22) ⇒ (zad 3.24); 2 raz. logike, 2^n produkata

Moguće rješenje:



⇒ broj sklopova ovakve realizacije je $\sim 2 \cdot n$

⇒ međutim, broj razina logike raste linearno: $\sim n$
a time s porastom n raste i ukupno kašnjenje izlaza

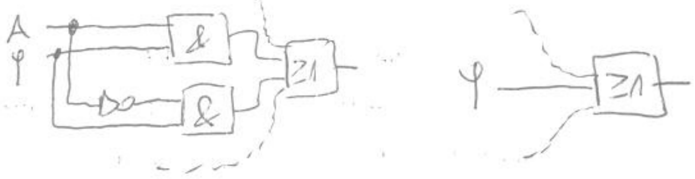
① i ② su očito kontradiktorni!

- u nastavku kolegija stoga ćemo proučavati tehnike koje osiguravaju maksimalnu brzinu rada (2 razine logike; Σp ili Πs) no unutar toga koriste minimalni broj sklopova s minimalnim brojem ulaza
  - ⇒ K-tablice (zbirka, dodatak 3)
  - ⇒ Quine-McCluskey

K_tablice

Prisjetimo se teorema simplifikacije:

$$A\cdot Y + \bar{A}\cdot Y = Y$$



i njegovog duala

$$(A+Y)\cdot(\bar{A}+Y) = Y$$

Produkti koji se razlikuju u jednoj varijabli mogu se simplificirati ⇒ umjesto dva sklopa I (ili ILI) trebam samo jedan i to s jednim ulazom manje

K-tablica je drugačiji prikaz tablice istinitosti

⇒ umjesto 2^n redaka radimo 2D strukturu (tablicu) pri čemu inzistiramo da dvije ćelije koje su međusobno susjedne predstavljaju dva minterma (maksterma) koji se razlikuju samo u jednoj varijabli

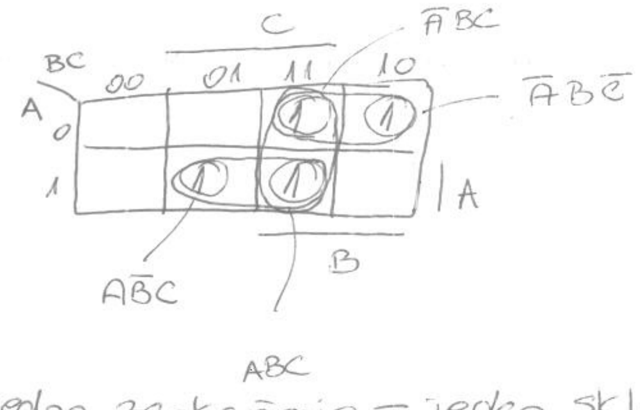
→ ideja

$\bar{A}B\bar{C}D$	$AB\bar{C}D$	
$\bar{A}BCD$	$ABCD$	$A\bar{B}CD$
	$ABC\bar{D}$	

⇒ 16 ćelija trebam ukupno
⇒ u ćeliju ću upisati 1 (0) ako f-ja sadrži taj minterm (maksterm)

→ možemo si pomoći tako da umjesto algebarskog zapisa koristimo binarni uzorak koji razdijelimo u retke i stupce i potom uzorak ispisujemo koristeći Grayev kod!

A B C	Y
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	1



- jedno zaokruženje ≡ jedan sklop

$$f(A,B,C) = \sum m(2,3,5,7)$$

$$= \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C + ABC$$

$$= \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C + ABC + \underbrace{A\bar{B}C + ABC}$$

$$+ \underbrace{\bar{A}BC + ABC}$$

$$+ \bar{A}B\underbrace{C + \bar{A}B\bar{C}}$$

$$= \underset{2}{\bar{A}B\bar{C}} + \underset{3}{\bar{A}BC} + \underset{5}{A\bar{B}C} + \underset{7}{ABC} + \underset{5+7}{AC} + \underset{3+7}{BC} + \underset{3+2}{\bar{A}B}$$

Def. <u>implikanti</u> su svi produkti (sume) koji impliciraju da je vrijednost funkcije 1 (0). U našem primjeru to su $\bar{A}B\bar{C}$, $\bar{A}BC$, $A\bar{B}C$, ABC, AC, BC, $\bar{A}B$

Def. <u>primarni implikanti</u> su implikanti koji nisu u cijelosti sadržani niti u jednom drugom implikantu; kod nas to su AC, BC, $\bar{A}B$

Def. <u>bitni primarni implikanti</u> su primarni implikanti koji jedini pokrivaju neki minterm (maksterm); kod nas su to AC (jedini pokriva m_5) te $\bar{A}B$ (jedini pokriva m_2). BC nije bpi jer m_3 još pokriva i $\bar{A}B$ a m_7 još pokriva i AC.

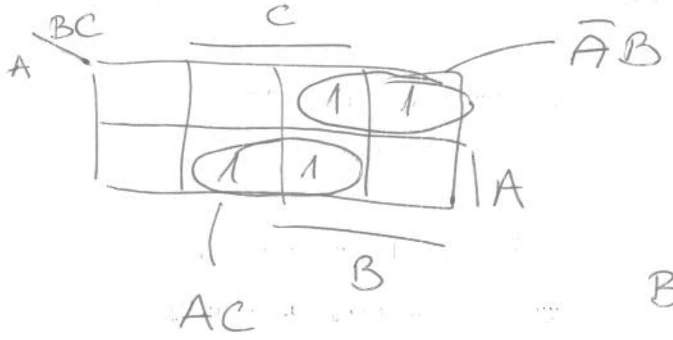
Def.
<u>Minimalni zapis funkcije</u> sastoji se od svih bitnih primarnih implikanata plus minimalno potrebnog broja primarnih implikanata uz koje su svi mintermi (makstermi) funkcije pokriveni.

⇒ u našem slučaju imamo:

$$f(A,B,C) = AC + \bar{A}B \Leftarrow \text{samo bitni primarni implikanti}$$

Kako to vidimo u K-tablici?

⇒ tražimo najveća moguća zaokruženja oblika $2^k \times 2^r$

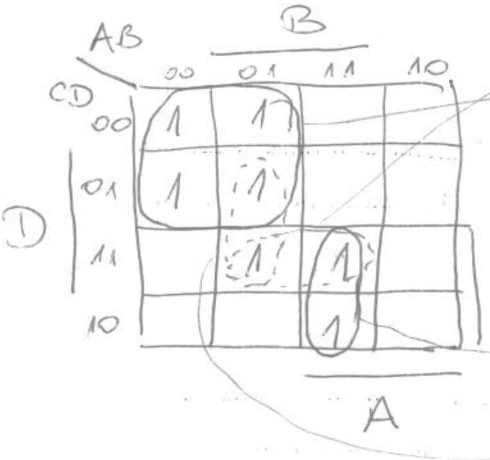


$$f(A,B,C) = \bar{A}B + AC$$

BC nema smisla dodavati jer neće pokriti ništa novoga.

Primjer 2.

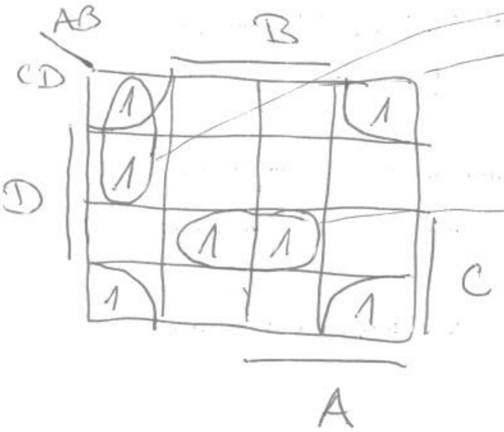
$$f(A,B,C,D) = \Sigma m(0,1,4,5,7,14,15)$$



$$\bar{A}\bar{C} + ABC + \begin{cases} BCD \\ \bar{A}BD \end{cases}$$

2 bpi, 4 pi, 11 i

Primjer 3.

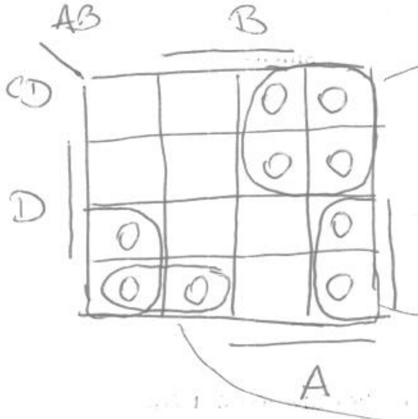


$$\bar{B}\bar{D} + BCD + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

⇒ postoje funkcije koje nemaju bitnih primarnih implikanata (vidi zadatak 4.20); kod takvih funkcija minimalni oblik je naprosto selekcija primarnih implikanata.

Minimizacija $\Pi\Sigma$ → konceptualno: isto kao i $\Sigma\Pi$, paziti samo da se zaokružuju i očitavaju nule!

Npr. $f(A,B,C,D) = \Sigma m(0,1,4,5,7,14,15) = \Pi M(2,3,6,8,9,10,11,12,13)$



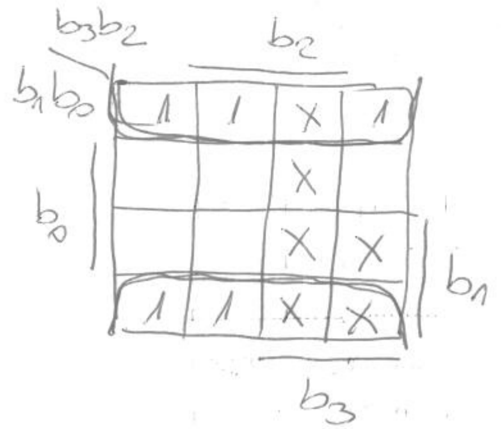
$(\overline{A}+C)(B+\overline{C})(A+\overline{C}+D)$

Nepotpuno specificirane funkcije

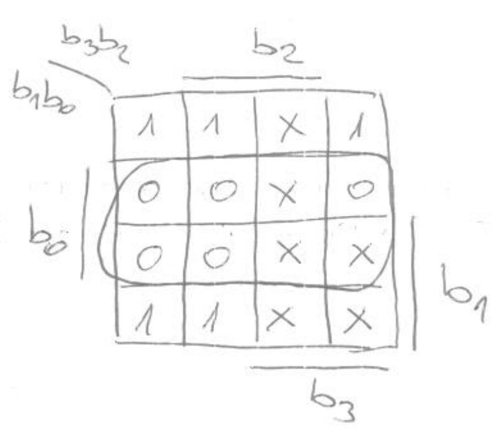
⇒ prisjetimo se: $f \equiv$ parni BCD broj: $b_3b_2b_1b_0$

$$f = \Sigma m(0,2,4,6,8) + \Sigma d(10,11,12,13,14,15)$$

– za don't care članove me nije briga: kada mi mogu pomoći da minimiziram veće područje, pravit ću se da su implikanti, inače ću ih ignorirati

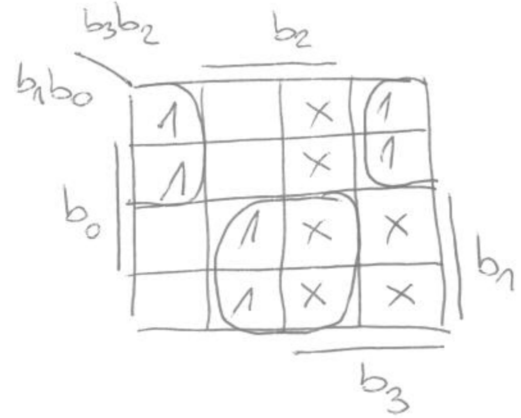


$f(b_3,b_2,b_1,b_0) = \overline{b_0}$

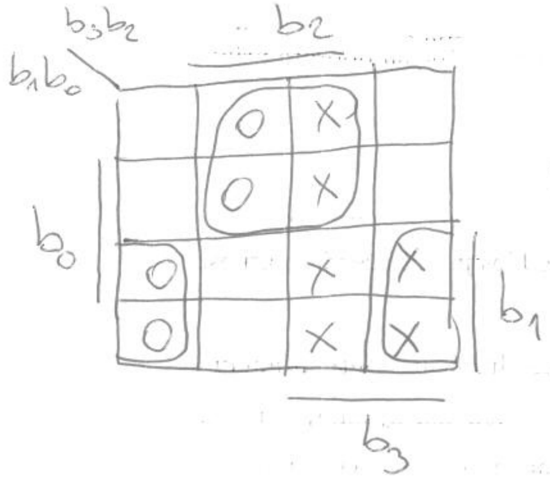


$f(b_3,b_2,b_1,b_0) = \overline{b_0}$

$f \equiv$ BCD znamenke manje od 2 ili veće od 5



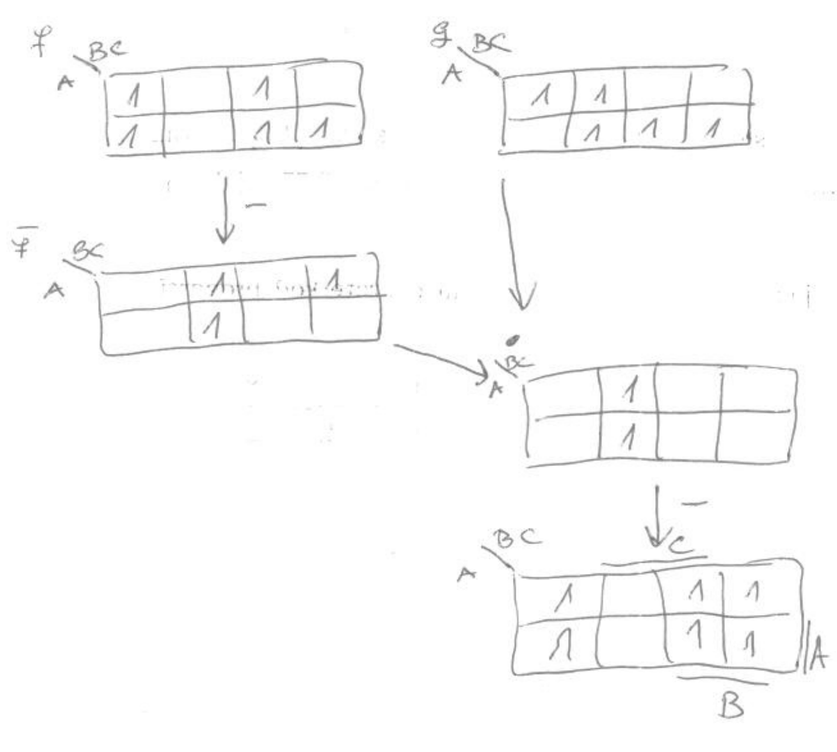
$$f = b_2 b_1 + \bar{b}_2 \bar{b}_1$$



$$f = (\bar{b}_2 + b_1)(b_2 + \bar{b}_1)$$

Koristeći K-tablice moguće je obavljati i izračun funkcija na jednak način kako se to radi s tablicama istinitosti.

Npr. $f = \Sigma m(0,3,4,6,7)$, $g = \Sigma m(0,1,5,6,7)$. Izračunati $h = \overline{(f \oplus 1) \cdot g}$.

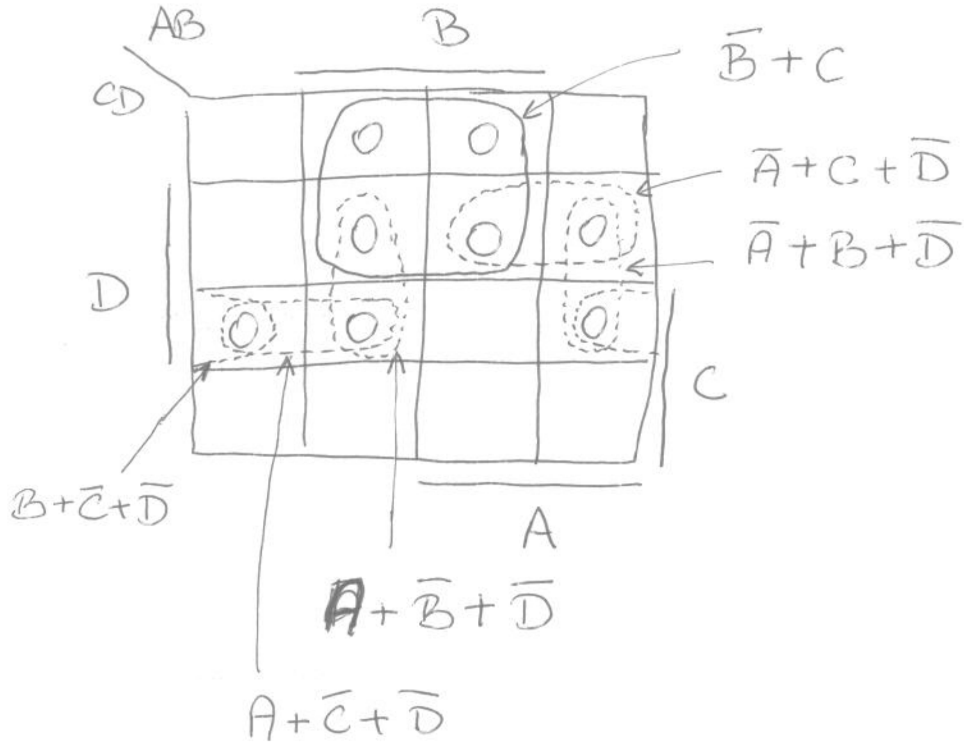


$$h = \Sigma m(0,2,3,4,6,7)$$
$$= \Pi M(1,5)$$
$$= B + \bar{C}$$

Zadana je funkcija $f(A,B,C,D)=\prod M(3,4,5,7,9,11,12,13)$.

Utvrdite sve primarne i bitne primarne implikante.

Kako glasi minimalni zapis te funkcije?



Primarni implikanti su:

$\overline{B}+C$, $\overline{A}+C+\overline{D}$, $\overline{A}+B+\overline{D}$, $B+\overline{C}+\overline{D}$, $A+\overline{B}+\overline{D}$, $A+\overline{C}+\overline{D}$

Bitni primarni su:

$\overline{B}+C$

Minimalni oblik je jedinstven:

$$f(A,B,C,D)=(\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+B+\overline{D})\cdot(A+\overline{C}+\overline{D})$$