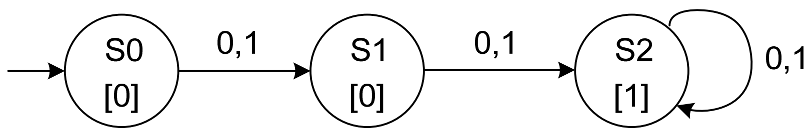
Zadatak:

Objasnite postupak minimizacije Mooreovog stroja s konačnim brojem stanja. Definirajte pojam *ekvivalentna stanja*.

Rješenje:

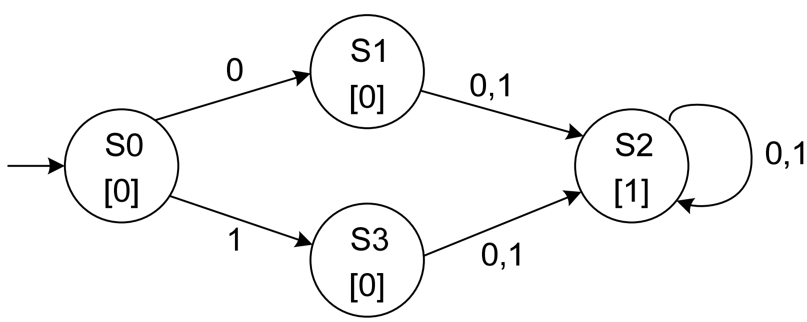
Pogledajmo jednostavan primjer dva stroja s konačnim brojem stanja, zadanih sljedećim tablicama, odnosno slikama. Strojevi imaju jedan binarni ulaz $x \in \{0,1\}$, i početno stanje *S0* (početno stanje je stanje u koje stroj dolazi "uključenjem").

Stroj 1.



Trenutno stanje	Pobuda	Sljedeće stanje	Trenutni izlaz
S0	0	S1	0
	1	S1	0
S1	0	S2	0
	1	S2	0
S2	0	S2	1
	1	S2	1

Stroj 2.



Trenutno stanje	Pobuda	Sljedeće stanje	Trenutni izlaz
S0	0	S1	0
	1	S3	0
S1	0	S2	0
	1	S2	0
S2	0	S2	1
	1	S2	1
S3	0	S2	0
	1	S2	0

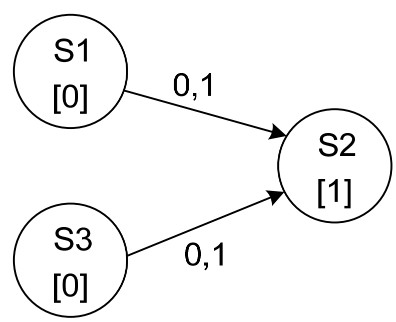
Pogledajmo kakav izlaz generiraju ti strojevi za sve moguće sljedove pobuda. Najprije uočimo da jednom kada stroj (1 ili 2) dođe u stanje S2, iz njega više nikada ne izlazi, i zauvijek na izlazu generira slijed jedinica. Kako oba stroja nakon dva koraka prelaze u to stanje, pogledajmo izlaze tih strojeva za sve moguće sljedove duljine 2:

x_1	x_2	**Stanja stroja 1**	**Stanja stroja 2**	**Izlazi stroja 1**	**Izlazi stroja 2**
0	0	S0→S1→S2	S0→S1→S2	0→0→1	0→0→1
0	1	S0→S1→S2	S0→S1→S2	0→0→1	0→0→1
1	0	S0→S1→S2	S0→S3→S2	0→0→1	0→0→1
1	1	S0→S1→S2	S0→S3→S2	0→0→1	0→0→1

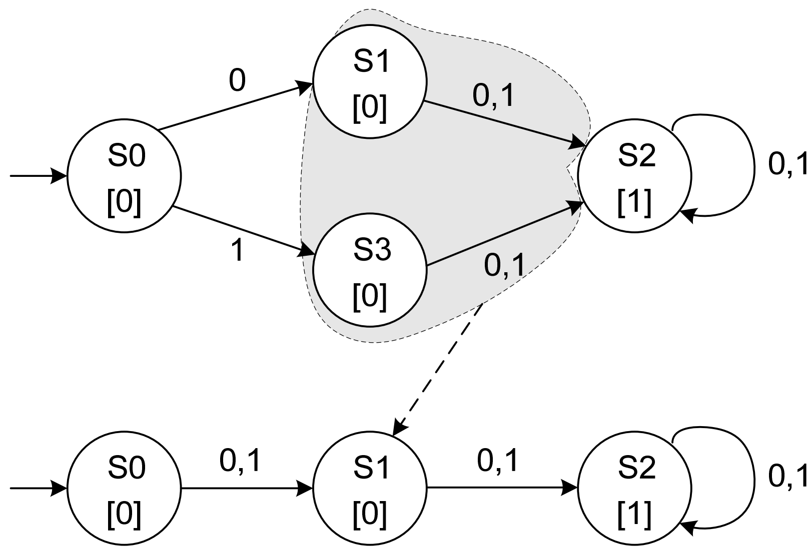
Usporedimo li slijed izlaza oba stroja, vidimo da su za sve moguće pobude oni jednaki. Stoga možemo zaključiti **da su strojevi** 1 i 2 **ekvivalentni**. Međutim, usporedimo li ta dva stroja, vidimo da imaju različit broj stanja, pa se njihova implementacija u sklopovlju može razlikovati. Općenito govoreći, nekako se podrazumijeva da će stroj s manje stanja trošiti manje sklopovlja, pa je minimalnost u broju stanja svakako poželjna. Nažalost, prethodna pretpostavka neće uvijek biti ispunjena (posebice ne ako gledamo složenost kombinacijskog sklopovlja); no brojimo li bistabile, tada će tipično stroj s manje stanja trošiti i manje bistabila. Primjerice, ako za kodiranje stanja koristimo jednojedinični kod, tada će nam za stroj 1 trebati tri bistabila, a za stroj 2 četiri bistabila.

Postavlja se pitanje kako od svih mogućih ekvivalentnih Mooreovih strojeva s konačnim brojem stanja pronaći onaj stroj koji ima minimalan broj stanja? Odgovor daje postupak minimizacije stroja s konačnim brojem stanja. Zadatak minimizacije jest pronaći sve "duplikate" stanja, i zamijeniti ih jedim stanjem, što će za posljedicu imati smanjenje broja stanja. Ovakva stanja koja se mogu zamijeniti samo jednim stanjem zvat ćemo *ekvivalentnim stanjima* (sam pojam bit će definiran uskoro).

Pogledajmo ponovno stroj 2, i to njegova stanja S1 i S3.

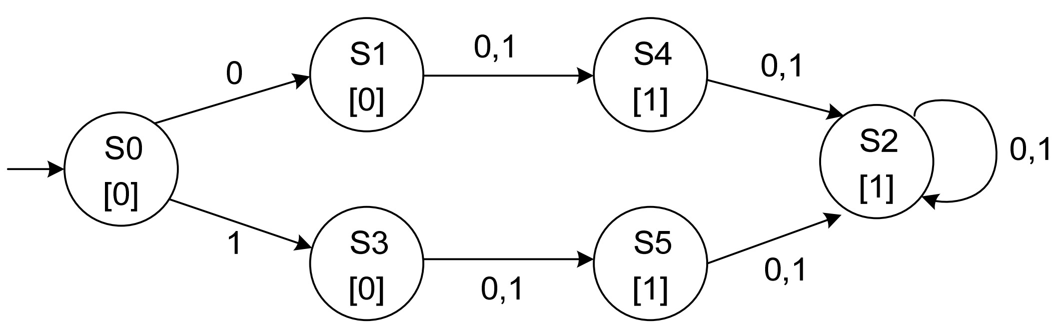


Stroj u oba stanja ima isti izlaz (0), te za sve moguće pobude prelazi u ista stanja (iz S1 i iz S3 za 0 se prelazi u S2, i za 1 se prelazi u S2). Stanja koja imaju iste izlaze te za istu pobudu prelaze u isto stanje zvat ćemo ekvivalentnim stanjima. Naime, konceptualno gledajući, potpuno nam je nebitno nalazi li se stroj u stanju S1 ili S3 – slijed izlaza od tog mjesta na dalje bit će isti. Stoga ta dva ekvivalentna stanja možemo zamijeniti jednim, i time zapravo iz stroja 2 dobivamo stroj 1, što prikazuje sljedeća slika.



Uočimo na ovom primjeru kako smo za reprezentanta ekvivalentnih stanja odabrali upravo jedno od uključenih stanja. Ovo međutim nije nužno; mogli smo uvesti novo ime za ekvivalenta stanja, primjerice SA.

Da bi stanja bila ekvivalentna, nije nužno da se iz njih prelazi u isto stanje. Pogledajmo to na primjeru još jednog stroja (stroj 3) koji je ekvivalentan strojevima 1 i 2, a prikazan je na sljedećoj slici:



Jesu li stanja S1 i S3 ekvivalentna? Nekako naslućujemo da jesu, samo to još moramo argumentirati. Izlazi su im isti, pa postoji mogućnost da su ekvivalentna. No što je s prijelazima? S1 za sve moguće pobude prelazi u stanje S4, a S3 za sve moguće pobude prelazi u stanje S5. Pogledamo li malo bolje, uočit ćemo da su stanja S4 i S5 ekvivalentna (prema prethodnoj definiciji). Stoga možemo zaključiti da su i stanja S1 i S3 također ekvivalentna – jer za iste pobude prelaze u ekvivalentna stanja.

Dajmo sada i formalnu definiciju ekvivalentnosti stanja. **Dva su stanja ekvivalentna ako su ista, ili ako imaju isti izlaz te ako za istu pobudu prelaze u ista ili ekvivalentna stanja.**

Postupak pronalaženja ekvivalentnih stanja (a time i minimizacije) može se raditi direktno kroz tablicu prijelaza stanja. To međutim može biti dosta naporno, pa postoji jednostavniji način. Prikažimo najprije tablicu prijelaza stanja stroja 3.

Trenutno stanje	**Pobuda**	**Sljedeće stanje**	**Trenutni izlaz**
S0	0	S1	0
	1	S3	0
S1	0	S4	0
	1	S4	0
S2	0	S2	1
	1	S2	1
S3	0	S5	0
	1	S5	0
S4	0	S2	1
	1	S2	1
S5	0	S2	1
	1	S2	1

U svrhu minimizacije potrebno je konstruirati kvadrat (tablicu) na čijim su stranicama pobrojana sva stanja, i potom gledati jedan trokut (tipično donji). Evo tablice.

S0						
S1						
S2						
S3						
S4						
S5						
	S0	S1	S2	S3	S4	S5

Zatim slijedi popunjavanje tablice. Znakom kvačice označe se svi parovi stanja za koje sigurno znamo da su ekvivalentni – to su parovi (Si,Si).

S0	√					
S1		√				
S2			√			
S3				√		
S4					√	
S5						√
	S0	S1	S2	S3	S4	S5

Potom se u tablici prijelaza stanja stroja razmatraju svi parovi stanja. U našem primjeru tih parova ima 5+4+3+2+1=15: (S0,S1), (S0,S2), …, (S0,S5), (S1,S2), …, (S1,S5), (S2,S3), …, (S2,S5), (S3,S4), (S3,S5) te (S4,S5). Za svaki se par provjerava:

1. ako izlazi stanja u razmatranom paru nisu isti, stanja nisu ekvivalentna; u tablicu ekvivalencija na mjesto koje odgovara razmatranom paru upisati križić (×).
2. ako su izlazi stanja u razmatranom paru isti, pogledaj prijelaze za svaku pobudu
    a. ako su prijelazi za sve pobude u ista stanja, tada su i stanja u razmatranom paru ekvivalentna (primjerice, ako se za pobudu 0 iz oba stanja prelazi u Si, a za pobudu 1 iz oba stanja u Sj)
    b. ako su za neku pobudu prijelazi u različita stanja (primjerice, ako se za pobudu 0 iz prvog stanja prelazi u Si a iz drugog u Sj), tada pogledaj u tablicu ekvivalencija; ako je utvrđeno da stanja Si i Sj nisu ekvivalentna (na mjestu tog para postoji križić), niti razmatrani par nije ekvivalentan, pa i na to mjesto stavi križić; ako za par (Si, Sj) još ne znamo je li ekvivalentan, na mjesto razmatranog para upiši uvjet Si≡Sj.
3. Ako se tijekom primjene točke 1, 2 ili ove točke utvrdi da neki par nije ekvivalentan, tada je potrebno pogledati u tablici ekvivalencija ima li u kojem polju uvjet da traženi par treba biti ekvivalentan; ukoliko ima, na to mjesto se stavlja križić, jer niti taj par nije ekvivalentan.
4. Ako se tijekom primjene točke 1, 2 ili ove točke utvrdi da je neki par ekvivalentan, potrebno je provjeriti u tablici ekvivalencija ima li u kojem polju uvjet da traženi par treba biti ekvivalentan; ukoliko ima, taj se uvjet briše (jer je utvrđena ekvivalentnost). Ako su time obrisani svi uvjeti u nekom polju, polje se proglašava ekvivalentnim.

Krenimo redom:

- (S0,S1): izlazi su isti. Za pobudu 0 stanje S0 ide u stanje S1, a stanje S1 u stanje S4. Da bi stanja S0 i S1 bila ekvivalentna, za pobudu 0 moraju ići u ekvivalentna stanja. Kako u tablici još nema informacije jesu li ta dva stanja ekvivalentna, upisujemo uvjet S1≡S4. Za pobudu 1 stanje S0 ide u stanje S3, a stanje S1 u stanje S4. Da bi stanja S0 i S1 bila ekvivalentna, za pobudu 1 također moraju ići u ekvivalentna stanja, pa upisujemo uvjet S3≡S4.

- (S0,S2): izlazi nisu isti. Stanja nisu ekvivalentna. Stavljamo križić. Provjeravamo ima li u tablici gdje uvjet S0≡S2? Nema.
- (S0,S3): izlazi su isti. Za pobudu 0 stanje S0 ide u stanje S1, a stanje S3 u stanje S5. Da bi stanja S0 i S3 bila ekvivalentna, za pobudu 0 moraju ići u ekvivalentna stanja, pa upisujemo uvjet S1≡S5. Za pobudu 1 stanje S0 ide u stanje S3, a stanje S3 u stanje S5. Da bi stanja S0 i S3 bila ekvivalentna, za pobudu 1 također moraju ići u ekvivalentna stanja, pa upisujemo uvjet S3≡S5.
- (S0,S4): izlazi nisu isti. Stanja nisu ekvivalentna. Stavljamo križić. Provjeravamo ima li u tablici gdje uvjet S0≡S4? Nema.
- (S0,S5): izlazi nisu isti. Stanja nisu ekvivalentna. Stavljamo križić. Provjeravamo ima li u tablici gdje uvjet S0≡S5? Nema.
- (S1,S2): izlazi nisu isti. Stanja nisu ekvivalentna. Stavljamo križić. Provjeravamo ima li u tablici gdje uvjet S1≡S2? Nema.
- (S1,S3): izlazi su isti. Za pobudu 0 stanje S1 ide u stanje S4, a stanje S3 u stanje S5. Da bi stanja S1 i S3 bila ekvivalentna, za pobudu 0 moraju ići u ekvivalentna stanja, pa upisujemo uvjet S4≡S5. Za pobudu 1 stanje S1 ide u stanje S4, a stanje S3 u stanje S5. Da bi stanja S1 i S3 bila ekvivalentna, za pobudu 1 također moraju ići u ekvivalentna stanja, no uvjet S4≡S5 već je upisan.

Do ovog trenutka nastala tablica prikazana je u nastavku.

S0	√					
S1	S1≡S4 S3≡S4	√				
S2	×	×	√			
S3	S1≡S5 S3≡S5	S4≡S5		√		
S4	×				√	
S5	×					√
	S0	S1	S2	S3	S4	S5

- (S1,S4): izlazi nisu isti. Stanja nisu ekvivalentna. Stavljamo križić. Provjeravamo ima li u tablici gdje uvjet S1≡S4? Ima. To je nužan uvjet da bi par (S0,S1) bio ekvivalentan. Kako sada znamo da taj uvjet nije ispunjen, znamo da niti stanja (S0,S1) nisu ekvivalentna – pa na tom mjestu stavljamo križić. Dodatno, tražimo je li negdje zadan uvjet S0≡S1? Nije.

- (S1,S5): izlazi nisu isti. Stanja nisu ekvivalentna. Stavljamo križić. Provjeravamo ima li u tablici gdje uvjet S1≡S5? Ima. To je nužan uvjet da bi par (S0,S3) bio ekvivalentan. Kako sada znamo da taj uvjet nije ispunjen, znamo da niti stanja (S0,S3) nisu ekvivalentna – pa na tom mjestu stavljamo križić. Dodatno, tražimo je li negdje zadan uvjet S0≡S3? Nije.
- (S2,S3): izlazi nisu isti. Stanja nisu ekvivalentna. Stavljamo križić. Provjeravamo ima li u tablici gdje uvjet S2≡S3? Nema.
- (S2,S4): izlazi su isti. Za pobudu 0 stanje S2 ide u stanje S2, a stanje S4 u stanje S2. To su ista stanja, pa ne pišemo nikakav uvjet. Za pobudu 1 stanje S2 ide u stanje S2, a stanje S4 u stanje S2. I to su ista stanja. Kako smo utvrdili da stanja S2 i S4 imaju isti izlaz, i za istu pobudu prelaze u ista stanja, zaključujemo da su S2 i S4 ekvivalentni, te u tablicu stavljamo kvačicu. Dodatno, tražimo je li to uvjet za neki drugi par? Nije.
- (S2,S5): izlazi su isti. Za pobudu 0 stanje S2 ide u stanje S2, a stanje S5 u stanje S2. To su ista stanja, pa ne pišemo nikakav uvjet. Za pobudu 1 stanje S2 ide u stanje S2, a stanje S5 u stanje S2. I to su ista stanja. Kako smo utvrdili da stanja S2 i S5 imaju isti izlaz, i za istu pobudu prelaze u ista stanja, zaključujemo da su S2 i S5 ekvivalentni, te u tablicu stavljamo kvačicu. Dodatno, tražimo je li to uvjet za neki drugi par? Nije.
- (S3,S4): izlazi nisu isti. Stanja nisu ekvivalentna. Stavljamo križić. Provjeravamo ima li u tablici gdje uvjet S3≡S4? Nema.
- (S3,S5): izlazi nisu isti. Stanja nisu ekvivalentna. Stavljamo križić. Provjeravamo ima li u tablici gdje uvjet S3≡S5? Nema.

Ovime smo stigli do sljedećeg izgleda tablice:

S0	√					
S1	×	√				
S2	×	×	√			
S3	×	S4≡S5	×	√		
S4	×	×	√	×	√	
S5	×	×	√	×		√
	S0	S1	S2	S3	S4	S5

Konačno, ostalo nam je provjeriti još jedan par.

- (S4,S5): izlazi su isti. Za pobudu 0 stanje S4 ide u stanje S2, a stanje S5 u stanje S2. To su ista stanja, pa ne pišemo nikakav uvjet. Za pobudu 1 stanje S4 ide u stanje S2, a stanje S5 u stanje S2. I to su ista stanja. Kako smo utvrdili da stanja S4 i S5 imaju isti izlaz, i za istu pobudu prelaze u ista stanja, zaključujemo da su S4 i S5 ekvivalentni, te u tablicu stavljamo kvačicu. Dodatno, tražimo je li to uvjet za neki drugi par? Je – to je nužan i jedini uvjet za ekvivalenciju para (S1,S3). Brisanjem tog uvjeta ćelija (S1,S3) ostaje prazna, pa sada znamo da su i stanja (S1,S3) ekvivalentna, te i tu stavljamo kvačicu. Još je ostalo za provjeriti je li S1≡S3 uvjet za neki drugi par? Nije.

Konačno stanje tablice ekvivalencije prikazano je u nastavku.

S0	√					
S1	×	√				
S2	×	×	√			
S3	×	√	×	√		
S4	×	×	√	×	√	
S5	×	×	√	×	√	√
	S0	S1	S2	S3	S4	S5

Očitajmo sada koja su sve stanja ekvivalentna: (S0), (S1), (S2), (S3), (S4), (S5), (S1,S3), (S2,S4), (S2,S5), (S4,S5). Da bismo utvrdili koliko nam treba minimalno stanja, potrebno je konstruirati skupove ekvivalentnih stanja, temeljeći se na relaciji tranzitivnosti: ako je A≡B, i B≡C, tada je i A≡C, pa su stanja {A,B,C} ekvivalentna. Ovaj korak možemo napraviti tako da redom čitamo ekvivalentne parove, te tražimo ima li još koji par koji sadrži bilo koje stanje iz skupa. Ako ima, stanja iz para dopisujemo u skup, i križamo iskorištene parove. Krenimo redom.

- Parovi: (S0), (S1), (S2), (S3), (S4), (S5), (S1,S3), (S2,S4), (S2,S5), (S4,S5)
  Čitamo par (S0) – nigdje drugdje nema stanja S0; to je jednočlani skup:
  {S0}
- ~~(S0),~~ (S1), (S2), (S3), (S4), (S5), (S1,S3), (S2,S4), (S2,S5), (S4,S5)
  Čitamo par (S1) – imamo još i par (S1,S3); nadodajemo S3 i tražimo ima li još koji par S3 – nema.
  {S0}, {S1,S3}
- ~~(S0),~~ ~~(S1)~~, (S2), ~~(S3)~~, (S4), (S5), ~~(S1,S3)~~, (S2,S4), (S2,S5), (S4,S5)
  Čitamo par (S2) – imamo još i par (S2,S4) i (S2,S5); nadodajemo S4 i S5 i tražimo ima li još koji par S4 ili S5 – ima (ali nema novih stanja). Ovo sve nadodajemo u jedan skup, i križamo iskorištene parove.
  {S0}, {S1,S3}, {S2,S4, S5}

- ~~(S0)~~, ~~(S1)~~, ~~(S2)~~, ~~(S3)~~, ~~(S4)~~, ~~(S5)~~, ~~(S1,S3)~~, ~~(S2,S4)~~, ~~(S2,S5)~~, ~~(S4,S5)~~
  Nema više novih parova, i time smo gotovi.

Ovim postupkom utvrdili smo tri skupa ekvivalentnih stanja. Ako svakom skupu damo novo ime, imamo npr.:

A = {S0}
B = {S1,S3}
C = {S2,S4, S5}

Naš novi stroj imat će samo tri stanja: A, B i C. Vratimo se sada u izvornu tablicu stanja stroja, i zamijenimo sve pojave "starih" stanja novim oznakama. Dobit ćemo:

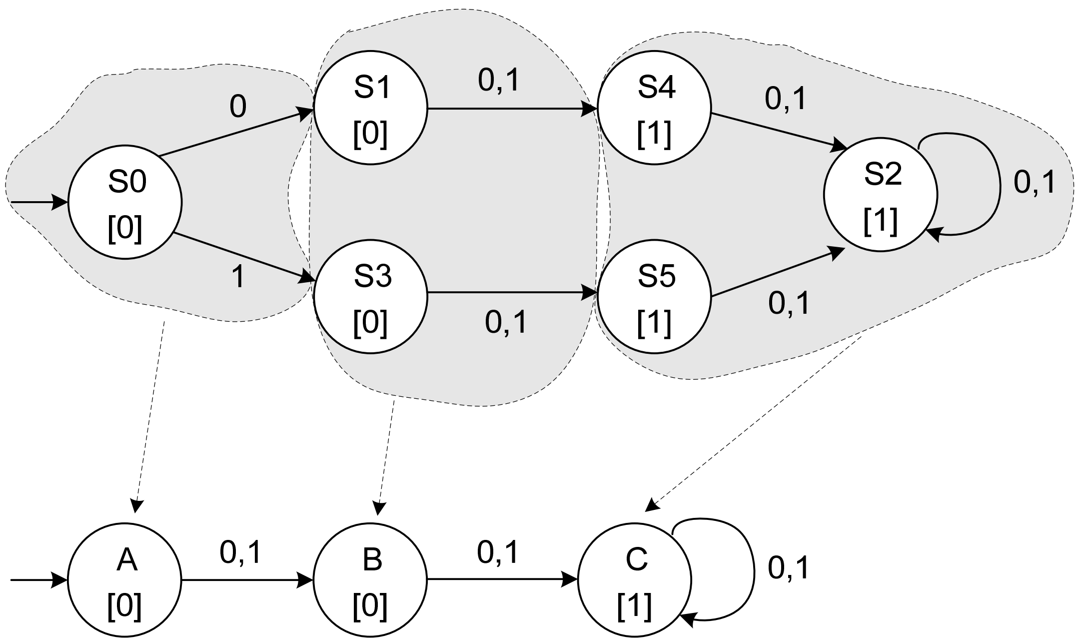
Trenutno stanje	**Pobuda**	**Sljedeće stanje**	**Trenutni izlaz**
~~S0~~ A	0	~~S1~~ B	0
	1	~~S3~~ B	0
~~S1~~ B	0	~~S4~~ C	0
	1	~~S4~~ C	0
~~S2~~ C	0	~~S2~~ C	1
	1	~~S2~~ C	1
~~S3~~ B	0	~~S5~~ C	0
	1	~~S5~~ C	0
~~S4~~ C	0	~~S2~~ C	1
	1	~~S2~~ C	1
~~S5~~ C	0	~~S2~~ C	1
	1	~~S2~~ C	1

Brisanjem duplih redaka slijedi tablica:

Trenutno stanje	**Pobuda**	**Sljedeće stanje**	**Trenutni izlaz**
A	0	B	0
	1	B	0
B	0	C	0
	1	C	0
C	0	C	1
	1	C	1

Što se je točno dogodilo? Za izvorni stroj sa šest stanja pronašli smo ekvivalentan stroj koji ima samo tri stanja (izvana opazivo ponašanje oba stroja, a to je slijed izlaza za zadani slijed ulaza, bit će isto).

Slika u nastavku prikazuje transformaciju stroja.



Obzirom da lokalna imena stanja stroja nisu bitna, ako sada dodatno zamijenimo A sa S0, B sa S1 te C sa S2, dobit ćemo upravo stroj 1.

Napomena: donekle modificirani postupak može se provesti i s tablicom ekvivalencije stanja koja ne sadrži dijagonalu (tj. parove stanja (Si,Si)).